Praktische Anwendungen eines Widerstandsnetzes zur Bestimmung eines ebenen Potential- oder Raumladungsfeldes

Von

G. ČREMOŠNIK und M. J. O. STRUTT

Mitteilung aus dem Institut für höhere Elektrotechnik
der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich

Mit 7 Textabbildungen

(Eingegangen am 23. November 1956)

1. Einleitung

Ein ebenes Widerstandsnetz mit der Speiseanlage ist ein Analogierechengerät für die Lösung von partiellen Differentialgleichungen vom elliptischen Typus. In der Technik und in der Physik treten oft die LAPLACEsche und die POISSONsche Differentialgleichung auf, da die Potential- und Raumladungsfelder mit diesen Gleichungen beschrieben werden. Die LAPLACEsche Gleichung $\Delta V = 0$ ist nur ein Sonderfall der POISSONschen Gleichung (Raumladungsdichte ϱ gleich Null), somit genügt es, allgemein die POISSONsche Gleichung zu betrachten:

$$\Delta V = -\frac{\varrho}{\varepsilon} \tag{1}$$

(ε Dielektrizitätskonstante).

Die Messung von Raumladungsfeldern mit Hilfe eines Widerstandsnetzes beruht auf der Analogie des elektrostatischen Feldes mit dem Stromfeld. Das elektrostatische Feld mit Raumladung ist gegeben durch:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \varrho\,, \tag{2}$$

wobei $\vec{D}$ die elektrische Verschiebung und ϱ die Raumladungsdichte ist. Da das Stromfeld quellenfrei ist ($\operatorname{div} \vec{j} = 0$), müssen wir in diskreten Meßpunkten des Stromfeldes eine Störung anbringen, d. h. einen zusätzlichen Strom i_0 einspeisen. In dieser Weise erhalten wir einen analogen Ausdruck zur Gl. (2):

$$\operatorname{div} \vec{j} = k\, i_0\,, \tag{3}$$

wobei k eine Dimensionsgröße ist ($1/m^3$) und i_0 der zusätzliche Strom. Beide Gln. (2) und (3) führen zur POISSONschen Differentialgleichung (1). Aus den Gln. (2) und (3) folgt der lineare Zusammenhang zwischen der Raumladung ϱ und dem Einspeisestrom i_0. Mit dem zusätzlichen Strom i_0 kann man somit die Raumladung nachbilden.

Das Widerstandsnetz kann als Analogie zu der Differenzenform der Differentialgleichung (1) betrachtet werden. Damit wird nicht exakt die Differentialgleichung, sondern die Differenzengleichung gelöst. Nach Bild 1 wird das ebene Feld in ein gleichmäßiges Maschennetz unter-

teilt. Der Abstand zwischen zwei benachbarten Punkten ist als Maschenweite d angenommen worden. Aus der Differenzenform der Gl. (1) erhalten wir nach Bild 1:

$$\sum_{1}^{4} V - 4\,V_0 + \frac{\varrho}{\varepsilon}\,d^2 = 0\,. \tag{4}$$

Die Analogieanordnung ist in Bild 2 gezeigt worden. Wenn wir den Kirchhoffschen Satz für die Ströme im Punkte V_0 anwenden, erhalten wir den Analogieausdruck zur Gl. (4):

$$\sum_{1}^{4} V - 4\,V_0 + i_0\,R = 0\,. \tag{5}$$

Aus der Analogiebetrachtung nach Bild 2 geht hervor, daß für ein ebenes, zweidimensionales Feld alle Widerstände R gleich sein müssen. In der Gl. (5) ist R dann der gewählte Widerstand im Netz. Ein Vergleich der Gl. (4) und (5) ergibt den Zusammenhang zwischen dem Einspeisestrom i_0 und der Raumladung ϱ:

$$i_0 = \frac{d^2}{\varepsilon\,R} \cdot \varrho = c \cdot \varrho\,, \tag{6}$$

wobei c eine Netzkonstante ist, die man leicht bestimmen kann.

Die Wahl des zweckmäßigsten Wertes des Widerstandes R des praktisch ausgeführten Netzes hängt mit den verwendeten Instrumenten und Stromquellen zusammen.

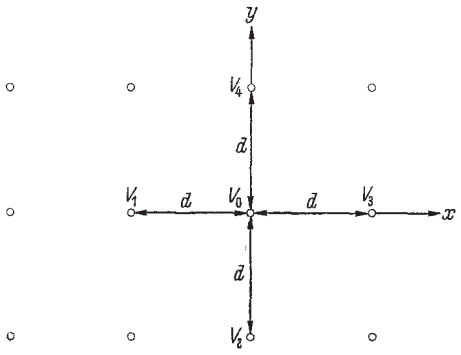

Bild 1. Zerlegung des Feldes in vorgegebene Maschenpunkte für die Reihenentwicklung des Potentials und zur Bestimmung des Einflusses der endlichen Maschenweite.

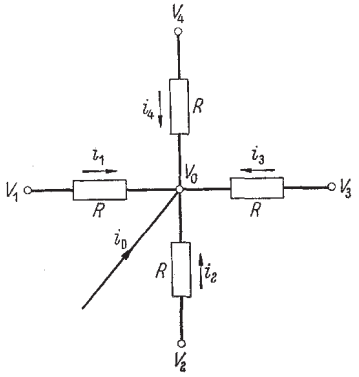

Bild 2. Ausschnitt aus dem Widerstandsnetz für die Bestimmung der Einspeiseströme als Nachbildung der Raumladung.

Da die Analogie nicht der exakten Differentialgleichung, sondern ihrer Differenzenform entspricht, werden auch die Messungen mit Modellen am Widerstandsnetz gegenüber den exakten Potentialen mit Fehlern behaftet. Bei einer geringen Zahl von Maschen am Modell führt die schrittweise Näherung, die bei der Nachbildung der Raumladung notwendig ist, nicht zu richtigen Ergebnissen, sondern es bleibt ein ziemlich großer Fehler im Endergebnis der Näherung. Somit erweist es sich als notwendig, den Einfluß der endlichen Maschenweite auf die Meßgenauigkeit zu bestimmen.

Bei den praktischen Messungen am Widerstandsnetz spielen, besonders bei stärkerer Raumladung, die Randeffekte eine wichtige Rolle. Wenn man gute Resultate mit Messungen an Modellen erhalten will, ist es unbedingt notwendig, diese Randeffekte zu beseitigen.

Als Fehlerquellen bleiben noch: Die Meßgenauigkeit der benutzten Instrumente, der Einfluß der Widerstandstoleranzen und auch noch die Temperaturabhängigkeit der Widerstände. Die theoretische Betrachtung wird zeigen, daß bei einer kleinen Widerstandstoleranz die zweite Fehlerquelle einen geringen Einfluß hat.

2. Einfluß der endlichen Maschenweite

Die Differenzengleichung entspricht umso genauer der Differentialgleichung je kleiner die Maschenweite d am Modell gewählt wird bzw. je kleiner das Verhältnis zwischen der Maschenweite d und der Gesamtabmessung b des Modells ist ($d/b \ll 1$). Da die Nachbildung der Raum

ladung wegen der vorhandenen Zahl der Stromquellen zur Einspeisung nur in einem beschränkten Bereich praktisch möglich ist, sind auch die Modellabmessungen beschränkt.

Um den Einfluß der endlichen Maschenweite zu bestimmen, können wir nach Bild 1 die Potentiale in benachbarten Punkten V_1, V_2, V_3 und V_4 aus dem Potential im Mittelpunkt V_0 mit Hilfe einer TAYLORreihe bestimmen. Wenn wir nur für die (x)-Richtung die Reihenentwicklung anschreiben (für die y-Richtung folgen ganz analoge Ausdrücke), erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= V_0 - d\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_0 + \frac{d^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_0 - \frac{d^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 V}{\partial x^3}\right)_0 + \frac{d^4}{4!}\left(\frac{\partial^4 V}{\partial x^4}\right)_0 - \frac{d^5}{5!}\left(\frac{\partial^5 V}{\partial x^5}\right)_0 + \frac{d^6}{6!}\left(\frac{\partial^6 V}{\partial x^6}\right)_0 - \cdots, \\ V_3 &= V_0 + d\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_0 + \frac{d^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_0 + \frac{d^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 V}{\partial x^3}\right)_0 + \frac{d^4}{4!}\left(\frac{\partial^4 V}{\partial x^4}\right)_0 + \frac{d^5}{5!}\left(\frac{\partial^5 V}{\partial x^5}\right)_0 + \frac{d^6}{6!}\left(\frac{\partial^6 V}{\partial x^6}\right)_0 + \cdots. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Praktisch wollen wir das Potential V_0 aus den Potentialwerten in den vier benachbarten Punkten V_1, V_2, V_3 und V_4 bestimmen. Wenn wir in der Reihenentwicklung noch die Glieder dritter Ordnung in Betracht ziehen und die analogen Ausdrücke für die y-Richtung berücksichtigen, ist leicht einzusehen, daß die Summe der Gl. (7) die Gl. (4) ergibt. Dabei wurde die POISSONsche Gl. (1) berücksichtigt. Aus Symmetriegründen fallen bei der Summenbildung alle Glieder mit Ableitungen ungerader Ordnung heraus. Den Fehler wegen der endlichen Maschenweite d können wir jetzt leicht bestimmen, indem wir die Glieder höherer Ordnung in Betracht ziehen. Die Summe der Reihenentwicklungen der Gl. (7) ergibt, indem wir die Reihenentwicklungen für die Punkte V_2 und V_4 in der y-Richtung und die Gl. (1) berücksichtigen:

$$\sum_1^4 V - 4\,V_0 = d^2\left(-\frac{\varrho}{\varepsilon}\right) + \frac{2\,d^4}{4!}\left(\frac{\partial^4 V}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 V}{\partial y^4}\right)_0 + \frac{2\,d^6}{6!}\left(\frac{\partial^6 V}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 V}{\partial y^6}\right)_0 + \cdots \quad (8)$$

Die linke Seite mit dem ersten Glied auf der rechten Seite ergibt die Differenzenform der Gl. (4). Als Fehler F infolge der endlichen Maschenweite geht aus der Gl. (8) hervor:

$$F = \frac{2\,d^4}{4!}\left(\frac{\partial^4 V}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 V}{\partial y^4}\right) + \frac{2\,d^6}{6!}\left(\frac{\partial^6 V}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 V}{\partial y^6}\right) + \cdots \quad (9)$$

Aus der Gl. (8) sieht man auch, wie man den Fehler infolge der endlichen Maschenweite beseitigen kann. Da wir die Ladungsdichte ϱ durch den Einspeisestrom i_0 nachbilden, können wir auch den restlichen Teil auf der rechten Seite der Gl. (8) berücksichtigen, indem wir die Einspeiseströme entsprechend korrigieren. Dabei muß man den Fehler F nach Gl. (9) bestimmen. Praktisch werden wir auch die höheren partiellen Ableitungen in der Differenzenform anschreiben und aus den gemessenen Potentialen V in den diskreten Punkten des Widerstandsnetzes den Fehler F berechnen.

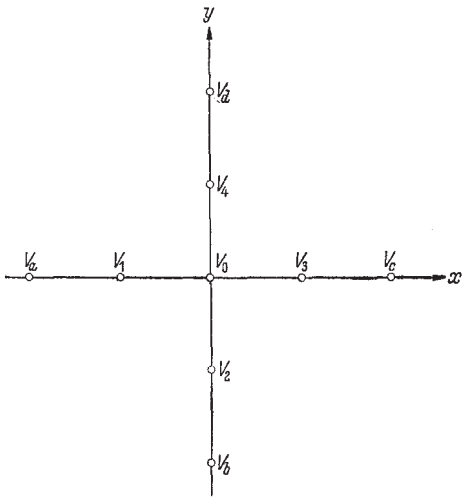

Bild 3. Feldausschnitt zur Bestimmung der Differenzen dritter und vierter Ordnung.

Für die praktische Anwendung ist es vorteilhaft, die oberen und unteren Differenzen zu definieren (mathematisch z. B. [10]: Vorwärts und rückwärts genommene Differenzen). Die vorwärts genommene Differenz entspricht der oberen Differenz und die rückwärts genommene Differenz unterscheidet sich von der unteren Differenz dem Vorzeichen nach. Nach Bild 3 ist die obere Differenz in bezug auf den Mittelpunkt V_0:

$$d\Delta_x V_0 = V_3 - V_0$$

und die untere:

$$d\nabla_x V_0 = V_1 - V_0.$$

Als Differenz zweiter Ordnung erhalten wir dann:

$$d^2\delta_x^2 V_0 = d(\Delta_x V_0 + \nabla_x V_0) = V_1 + V_3 - 2\,V_0. \quad (10)$$

Dies ist die sogenannte zentrale Differenz in bezug auf den Punkt V_0. Bei Differenzen ungerader Ordnung müssen wir immer die obere und die untere Differenz bestimmen. Die Summe der beiden

multipliziert mit dem Maschenintervall d, ergibt dann die zentrale Differenz der nächsthöheren geraden Ordnung. Nach diesem Verfahren folgt aus Bild 3:

$$d^3 \Delta_x^3 V_0 = d(\Delta_x V_1 + \Delta_x V_3 - 2\,\Delta_x V_0) = V_c - 3\,V_3 + 3\,V_0 - V_1 . \tag{11}$$

Für die entsprechende untere Differenz erhalten wir:

$$d^3\, \nabla_x^3 V_0 = V_a - 3\,V_1 + 3\,V_0 - V_3 . \tag{12}$$

Somit ist die zentrale Differenz vierter Ordnung:

$$d^4 \delta_x^4 V_0 = d^4(\Delta_x^3 V_0 + \nabla_x^3 V_0) = V_a + V_c - 4\,(V_1 + V_3) + 6\,V_0 . \tag{13}$$

Aus den Gln. (10), (11), (12) und (13) geht hervor, daß die Koeffizienten der Potentialwerte bzw. Funktionswerte die Binomialkoeffizienten sind. Wenn wir den analogen Ausdruck für die zentrale Differenz vierter Ordnung in y-Richtung berücksichtigen, erhalten wir für die partielle Ableitung vierter Ordnung die Differenzenform:

$$d^4\left(\frac{\partial^4 V}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 V}{\partial y^4}\right)_0 = V_a + V_b + V_c + V_d - 4\,(V_1 + V_2 + V_3 + V_4) + 12\,V_0 . \tag{14}$$

Zur Bestimmung der Differenzenform der Ableitungen vierter Ordnung sind symmetrisch in bezug auf den zentralen Punkt je zwei Maschenintervalle notwendig, also insgesamt 4 Intervalle. Wenn man die Potentiale der äußeren Punkte (Bild 3) mit V'' usw. bezeichnet, so kann man die Gl. (14) in der Form:

$$d^4 \delta^4 V_0 = \sum_1^4 V'' - 4 \sum_1^4 V' + 12\,V_0 \tag{15}$$

schreiben. Unter Verwendung der Binomialkoeffizienten können wir jetzt die zentrale Differenzenform jeder beliebigen partiellen Ableitung gerader höherer Ordnung anschreiben. Im Ausdruck (9) für den Fehler ist das letzte Glied sechster Ordnung, und die entsprechende Differenzenform lautet:

$$d^6\left(\frac{\partial^6 V}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 V}{\partial y^6}\right)_0 = d^6 \delta^6\, V_0 = \sum_1^4 V''' - 6 \sum_1^4 V'' + 15 \sum_1^4 V' - 40\,V_0 . \tag{16}$$

Für die praktische Berechnung sind die Koeffizienten vor den Gliedern wichtig. Aus Gl. (9) folgt, daß der Koeffizient des Gliedes vierter Ordnung lautet:

$$\frac{2}{4!} = \frac{1}{12} < 0{,}1 .$$

Wenn die Differenzen vierter Ordnung nach Gl. (14) bzw. (15) einen Wert der Größenordnung 1 ergeben, so beeinflußt der Fehler schon die erste Dezimale des Resultates. Hieraus geht hervor, daß die Ableitungen vierter Ordnung bei großer Maschenweite das Resultat in starkem Maße beeinflussen können.

Bei den Gliedern sechster Ordnung nach Gl. (9) ist der Koeffizient:

$$\frac{2}{6!} = \frac{1}{360} \approx 2{,}8 \cdot 10^{-3} .$$

Sie können also die dritte Dezimale im Resultat beeinflussen. Dieser Einfluß ist schon sehr klein und bei praktischen Berechnungen ist er meistens vernachlässigbar.

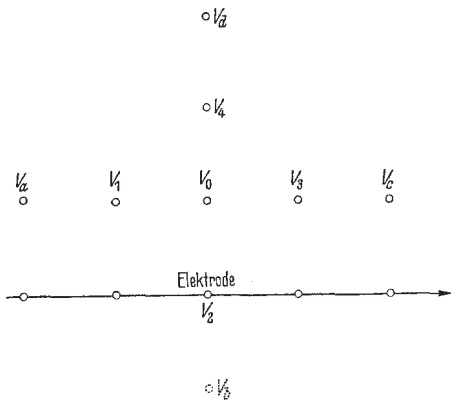

Bild 4. Feldausschnitt zur Bestimmung der zentralen Differenzen vierter Ordnung in Punkten vor einer Elektrode.

Für die Punkte vor den Elektroden mit vorgegebenen Potentialen entsteht eine Schwierigkeit, da die nächsten äußeren Punkte nicht mehr vorhanden sind, wie aus Bild 4 ersichtlich ist. Die untere Differenz des Potentialpunktes V_2 in y-Richtung ist nicht definiert, da der Potentialpunkt V_b (Bild 4) nicht vorhanden ist. Bei der Betrachtung der Randeffekte im nächsten Abschnitt 3 werden wir den Beweis bringen, daß man in diesem Fall die untere Differenz durch die obere ersetzen muß. Da der Potentialpunkt V_b nicht vorhanden ist, muß man sein Spiegelbild in bezug auf die Elektrode nehmen. An Stelle von V_b tritt in der Differenzenform das Potential V_0 des Spiegelbildes auf. Somit ist nach Gl. (14) die Korrektur für die Punkte vor der Elektrode:

$$d^4 \delta^4 V_0 = d^4(\delta_x^4 V_0 + \delta_y^4 V_0) = V_a + V_c + V_d - 4\,(V_1 + V_2 + V_3 + V_4) + 13\,V_0 . \tag{17}$$

Wenn der Punkt am Rande des Modells liegt, so ergibt sich in analoger Weise:

$$d^4\delta^4 V_0 = V_a + V_c + 2\,V_d - 4\,(V_1 + V_3 + 2\,V_4) + 12\,V_0\,. \tag{18}$$

Für die Punkte am Rande und vor den Elektroden muß man noch die unsymmetrische Verteilung der benachbarten Punkte berücksichtigen. Wegen dieser Unsymmetrie fallen bei der Bildung der Summe der Gl. (7) die ungeraden Ableitungen nicht heraus. Bei der Fehlerbetrachtung müssen wir noch zusätzlich die Differenzenformen der Glieder ungerader Ordnung berücksichtigen. Damit wird allgemein der Meßfehler sowie auch der Einfluß der endlichen Maschenweite größer. In dieser Weise kann man die Verzerrungen des Feldes bei den Elektroden, die bei den praktischen Messungen an Modellen entstehen, erklären. Je kleiner die Maschenweite am Modell gewählt wird, desto kleiner werden die Fehler dieser Art. Praktisch wählt man die Größe des Modelles so, daß schon die Ableitungen vierter Ordnung einen geringen Einfluß auf die Genauigkeit haben und die Feldverzerrungen am Rande und in der Nähe der Elektroden möglichst gering werden.

Bis jetzt haben wir angenommen, daß die Ladungsdichte ϱ nach Gl. (8) bekannt ist. Das ist im Allgemeinen nicht der Fall. Betrachten wir als Beispiel die Messung von Raumladungsfeldern an Modellen von Hochvakuumelektronenröhren. Die Ladungsdichte ist nicht bekannt, sondern sie soll mit Hilfe schrittweiser Näherungen aus den gemessenen Werten der Potentiale V und aus der bekannten Stromdichte j nach der Gleichung:

$$\varrho = \frac{j}{\sqrt{2\,e_0}\sqrt{V}} \tag{19}$$

bestimmt werden. Mit e_0 haben wir das Verhältnis e/m bezeichnet, wobei e der Betrag der Elektronenladung und m die Elektronenmasse ist. Die erste Näherung für die Raumladung erhalten wir mit Hilfe der Gl. (19) aus dem statischen Potential V_{st} (ohne Raumladung).

Wenn die Maschenweite zu groß ist, entsteht nach Gl. (8) und (9) ein Fehler im Betrage $F/4$, so daß V_{st} im allgemeinen zu groß ist. Nach Gl. (19) wird somit ϱ kleiner, was nach Gl. (4) zu einem zusätzlichen Fehler führt. Die Messungen bei einer ebenen Diode[1], wo man das Raumladungsfeld genau berechnen kann, haben gezeigt, daß bei kleiner Maschenzahl im Modell die Fehler relativ sehr groß waren. Man muß dann die Potentialwerte korrigieren, indem man nach Gl. (9) bzw. aus der Differenzenform nach Gl. (14) und (16) den Fehler berechnet. Mit dem korrigierten Wert V wird dann nach Gl. (19) die Ladungsdichte ϱ bestimmt. In dieser Weise wird der Fehler verringert. Die Korrektur kann in mehreren Schritten ausgeführt werden. Die Annäherung an den genauen Wert wird dann immer besser, wie das in der Relaxationstechnik der Fall ist.

Wenn man das gewünschte Potentialfeld genauer bestimmen will, so läßt sich das erreichen, indem Messungen an Modellen mit verschiedenen Maschenweiten, bzw. mit grober und feiner Unterteilung durchgeführt werden. Aus den beiden Resultaten kann man dann mit Hilfe der Extrapolationstechnik einen neuen, viel genaueren Wert erhalten, der noch einer viel feineren Unterteilung entsprechen würde. Die erste Methode wurde von L. F. RICHARDSON [1] und [2] angegeben. Eine Erweiterung dieser Methode hat R. CULVER [8] gebracht. Da sie für die praktische Anwendung sehr günstig ist, werden wir die Endergebnisse angeben.

Die exakte Lösung der POISSONschen Gleichung sei f. Eine Lösung, die der Maschenweite d_1 und der Maschenzahl $n_1 = b/d_1$ entspricht, sei f_1 und endlich sei f_2 eine zweite Lösung, die der Maschenweite d_2 und der Maschenzahl $n_2 = b/d_2$ entspricht. Wenn man für f einen Reihenansatz mit Hilfe der beiden Lösungen f_1 und f_2 aufstellt, bei Vernachlässigung von Potenzen höher als zwei von d_1 und d_2, erhalten wir:

$$f = a_2 f_2 - a_1 f_1\,, \tag{20}$$

mit den Abkürzungen:

$$a_1 = \frac{n_1^2}{n_2^2 - n_1^2} \qquad \text{und} \qquad a_2 = \frac{n_2^2}{n_2^2 - n_1^2}\,. \tag{21}$$

[1] Bemerkung. Diese Messungen sollen in einem weiteren Artikel veröffentlicht werden, vgl. auch [16].

Für $n_2 = 2$ und $n_1 = 1$ erhalten wir die RICHARDSONsche Formel:

$$f = f_2 - \frac{1}{3}(f_1 - f_2)\,. \tag{22}$$

3. Betrachtung und Beseitigung der Randeffekte

Da die Nachbildung der Raumladung nur in einer begrenzten Zahl von Punkten möglich ist (z. B. bei 150 Speiseströmen), spielen die Randeffekte eine große Rolle, und es erwies sich als unbedingt notwendig, diese zu beseitigen. Hierzu mußten die richtigen Randwiderstände, sowie die Größe der Speiseströme in den Randpunkten bestimmt werden. Für die Randpunkte sind die Verhältnisse in Bild 5 gezeichnet. Es fehlt der vierte Widerstand zu dem benachbarten Punkt V_3, so daß der Randpunkt V_0 nur drei Verbindungen mit drei benachbarten Punkten hat. Wir können wieder die Potentialwerte V_1, V_2 und V_4 aus dem Potential V_0 durch eine TAYLORreihe bestimmen [vgl. Gl. (7)]. Nachdem wir die Reihen nach den Gliedern zweiter Ordnung abbrechen ($d/b \ll 1$!), ergibt ihre Summe:

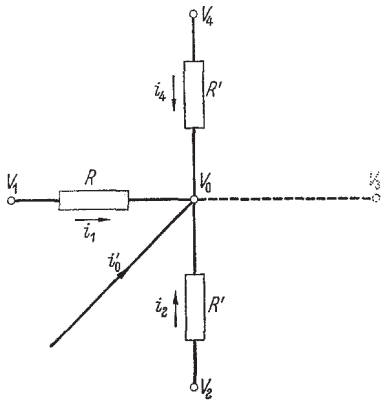

Bild 5. Ausschnitt aus dem Widerstandsnetz im Randgebiet zur Bestimmung und Beseitigung der Randeffekte.

$$V_1 + V_2 + V_4 = 3\,V_0 - d\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{d^2}{2!}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + (d')^2\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\,. \tag{23}$$

Wenn wir uns das Feld aus Differenzenflächenelementen zusammengesetzt denken, so wird am Rande nur die halbe Fläche in Betracht gezogen. Wir können uns die Maschenweite somit reduziert denken:

$$d' = \frac{d}{\sqrt{2}}\,. \tag{24}$$

Sie ergibt dann die halbe Differenzenfläche. Da wir das Gleichgewicht in den Nachbarpunkten des Randes nicht stören dürfen, ist diese Änderung nur in der y-Richtung (analog wie die Änderung der Randwiderstände) zu berücksichtigen. In dieser Weise folgt aus Gl. (23) die POISSONsche Gleichung, die die Raumladungsdichte ϱ in der Randfläche berücksichtigt. Wenn wir die erste Ableitung nach x in Differenzenform ausdrücken:

$$d\frac{\partial V}{\partial x} = V_1 - V_0\,, \tag{25}$$

erhalten wir endlich aus Gl. (23) unter Berücksichtigung der Gl. (1):

$$2\,V_1 + V_2 + V_4 - 4\,V_0 + d^2\frac{\varrho}{\varepsilon} = 0\,. \tag{26}$$

Aus dem KIRCHHOFFschen Satz für die Ströme nach Bild 5 folgt:

$$(V_1 - V_0)\frac{R'}{R} + V_2 + V_4 - 2\,V_0 + i_0'\,R' = 0\,. \tag{27}$$

Der Vergleich von Gl. (26) und (27) zeigt, daß sie nur dann dieselbe Form haben, wenn:

$$\boxed{R' = 2\,R} \tag{28}$$

st. Für den Einspeisestrom in den Randpunkten i_0' folgt also:

$$\boxed{i_0' = d^2\frac{\varrho}{\varepsilon}\cdot\frac{1}{2\,R} = \frac{i_0}{2}\,.} \tag{29}$$

Das gleiche Ergebnis erhalten wir direkt aus der Gl. (6), wenn wir die reduzierte Maschenweite d' nach Gl. (24) berücksichtigen. In den Randpunkten muß der Randwiderstand also den zweifachen Wert des Widerstandes in den übrigen Maschen haben und der Speisestrom in den Randpunkten muß die Hälfte des Speisestromes in den inneren Punkten sein.

Bei Messungen am Modell einer ebenen Diode wurden die obigen theoretischen Resultate bestätigt. Da das Potentialfeld hierbei eindimensional ist, sind die Potentialkurven zwischen

Anode und Kathode Parallele zu den Elektroden und somit gerade Linien. Ohne Randkorrektur war dies nicht erfüllt, mit Randkorrektur aber wohl. Die Kontrolle wurde auch für das statische Feld ohne Raumladung durchgeführt und die Messung ergab hierbei bei Berücksichtigung der obigen Korrektur ein homogenes Feld ohne Randeffekte. Die Randeffekte werden auf diese Weise nur dann beseitigt, wenn die Randfeldkurve eine Gerade ist, die dem Rand entspricht. Sollte die Randfeldkurve eine andere Gestalt haben, so muß man sie nachzubilden versuchen, indem man die Randwiderstände so dimensioniert, daß die Randpunkte auf der Feldkurve liegen. Die Messung soll stets in einem geschlossenen Feld ausgeführt werden, d. h., das Feld soll durch bekannte Aequipotentialkurven und (oder) Feldkurven begrenzt sein.

Wenn der Feldgradient am Rande vorgegeben ist, so kann man die entsprechenden Einspeiseströme korrigieren, wie G. LIEBMANN [15] in einer kürzlich erschienenen Übersicht über die Widerstandsnetzanalogie angegeben hat. Dann wird der Einspeisestrom (vgl. Gl. 29):

$$i_0' = \frac{d}{R}\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_0 + \frac{d^2}{\varepsilon\, 2\, R}\,\varrho\,. \tag{30}$$

Da wir oben die Randkurve als Feldlinie betrachten, ist für diese Randpunkte:

$$\frac{\partial V}{\partial n} = 0$$

und die Übereinstimmung von (30) mit der Gl. (29) wird vollkommen.

4. Wahl der Widerstände sowie Einfluß der Widerstandstoleranzen und -Änderungen

In einem ebenen Widerstandsnetz sind alle Widerstände vom gleichen Wert R, außer den Randwiderständen, die einen Wert $2\,R$ haben. Bei der Wahl der Widerstände spielen die nachzubildende Raumladung sowie die verwendeten Meßinstrumente bzw. die Meßmethode eine wichtige Rolle. In bezug auf die verwendeten Meßinstrumente bzw. Meßmethode ist es günstig, die Widerstände R klein zu wählen. Auf diese Weise kommt kein zusätzlicher Meßfehler zustande. Im allgemeinen ist in einem unendlichen Netz zwischen zwei Punkten der Widerstand gleich $R/2$. Der innere Widerstand R_i des Instrumentes für die Potentialmessung im Feld soll viel größer sein als R, $(R_i \gg R)$.

Andererseits ist der Einspeisestrom i_0 nach Gl. (6) reziprok proportional zu R. Praktisch erzielt man die Stromquellen mit Hilfe von Spannungsquellen (Netzgeräte), die über hochohmige Widerstände bzw. Potentiometer mit den Feldpunkten verbunden werden. Bei starker Raumladungsdichte ϱ ist ein höherer Wert des Netzwiderstandes R günstiger. Dadurch wird der Einspeisestrom nicht zu hoch und man kann gewöhnliche Netzgeräte als Spannungsquellen verwenden. Bei schwacher Raumladung ist es aber günstig, daß der Netzwiderstand R einen kleinen Wert hat, denn andernfalls werden die Einspeiseströme zur Nachbildung der Raumladung zu klein und man kann sie nicht gut einstellen und korrigieren. Bei zu kleinem Wert R werden die Ströme, die durch das Widerstandsnetz fließen, groß, was sicher nicht erwünscht ist (Erwärmung). In unserem Widerstandsnetz wurde $R = 3{,}5\ \mathrm{k}\Omega$ gewählt, was in einigen Fällen schon ein zu großer Wert ist. Ein etwas kleinerer Wert des Netzwiderstandes wäre vielleicht in manchen Fällen günstiger.

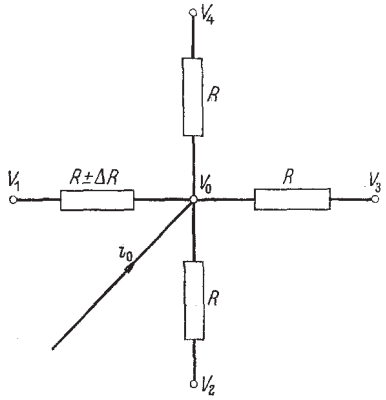

Bild 6. Ausschnitt aus dem Widerstandsnetz zur Bestimmung des Einflusses der Widerstandstoleranzen.

Bei den Fehlerbetrachtungen muß man den Einfluß der Abweichungen der Widerstandswerte von den Nennwerten in Rechnung setzen. Hierfür wurde eine Methode von G. LIEBMANN [6] angegeben, die hier erweitert wird. Unser Verfahren folgt direkt aus der Analogiebetrachtung, ohne jegliche zusätzliche Voraussetzungen (im Gegensatz zu G. LIEBMANN). Den Nennwert des Widerstandes bezeichnen wir mit R. Nach Bild 6 soll der Widerstand zwischen den Punkten V_1 und V_0 von dem Wert R um $\pm\, \Delta R$ abweichen. Aus dem KIRCHHOFFschen Gesetz für die

Ströme folgt nach Bild 6:

$$\sum_1^4 V - 4\,V_0 + i_0\,R \mp \frac{\Delta R}{R}(V_1 - V_0) = 0\,, \tag{31}$$

indem wir für

$$\frac{V_1 - V_0}{R\left(1 \pm \frac{\Delta R}{R}\right)} \approx \frac{1}{R}(V_1 - V_0)\left(1 \mp \frac{\Delta R}{R}\right)$$

geschrieben haben. Aus der Gl. (31) erhalten wir das Potential V_0:

$$V_0 = \frac{1}{4}\sum_1^4 V + \frac{1}{4}\,i_0\,R \mp \frac{\Delta R}{4\,R}(V_1 - V_0)\,. \tag{32}$$

Die Änderung des Potentials im Mittelpunkt V_0 ist somit:

$$\delta V_0 = \mp \frac{\Delta R}{4\,R}\Delta V\,, \tag{33}$$

wo wir die Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten V_1 und V_0 im Felde mit ΔV bezeichnet haben. Das negative Vorzeichen gilt für positive ΔR und das positive für negative ΔR. ΔV kann positiv oder negativ sein, je nachdem ob $V_1 > V_0$ bzw. $V_1 < V_0$ ist. Wenn z. B. $V_1 > V_0$ ist, wird ΔV positiv und bei einem kleineren Widerstand (ΔR negativ) wird δV_0 positiv. Das Potential des Punktes V_0 wird dann vergrößert. Das wurde auch experimentell bestätigt. Die gleiche Überlegung für den Punkt V_1 ergibt die gleiche Änderung des Potentials V_1, nur im entgegengesetzten Sinne. Wenn sich das Potential V_0 vergrößert, so wird das Potential V_1 um den gleichen Betrag δV_0 kleiner. Somit ist die gesamte Änderung δV des Potentials über dem Widerstand $R \pm \Delta R$ gleich $2\,\delta V_0$ oder

$$\delta V = 2\,\delta V_0 = 2\frac{\Delta R}{4\,R}\cdot\Delta V = 0{,}5\frac{\Delta R}{R}\cdot\Delta V\,. \tag{34}$$

Eine ähnliche Überlegung führt G. Liebmann [6] durch. Er nimmt an, daß sich nach Bild 6 auch die Potentialdifferenzen $V_4 - V_0$ bzw. $V_2 - V_0$ um den Betrag $\delta V' = \frac{3}{4}\,\delta V$ ändern. Somit erhält er:

$$\delta V = \frac{2}{5}\frac{\Delta R}{R}\Delta V = 0{,}4\frac{\Delta R}{R}\Delta V\,.$$

Wenn man als Änderung $\delta V'$ im Mittel nur $\frac{1}{2}\,\delta V$ nimmt, was auch praktisch gemessen wurde, und wie aus Bild 6 hervorgeht, erhält man eine vollkommene Übereinstimmung mit der Gl. (34).

Nehmen wir ein praktisches Beispiel mit einer prozentualen Änderung des eingebauten Widerstandes im Netz von 3,37%. An den Klemmen dieses veränderten Widerstandes wurde bei $\Delta V = 0{,}5$ V eine Änderung $\delta V = 0{,}008\ldots$ V gemessen. Gl. (34) ergibt 0,00843 V und nach G. Liebmann ergäbe sich: 0,006744 V.

Wenn wir die Änderung auf die gesamte Spannung U_0 im Modell beziehen, erhalten wir:

$$\frac{\delta V_0}{U_0} = \mp\frac{\Delta R}{4\,R}\cdot\frac{\Delta V}{U_0} = \mp\frac{\Delta R}{4\,R}\frac{1}{n}\,, \tag{35}$$

wobei n die Maschenzahl des Modells in der Richtung von U_0 ist. Das gilt genau nur für homogene Felder, doch erhalten wir so einen guten allgemeinen Einblick in den Einfluß der Widerstandstoleranzen. Für unser Beispiel bei $n = 10$ folgt eine prozentuale Änderung $\delta V_0/U_0$ des Potentiales von 0,084%. Sie ist also sehr gering. Die prozentuale Änderung des Potentiales nach Gl. (35) infolge der Widerstandstoleranzen ist gleich einem Viertel der prozentualen Widerstandsänderung dividiert durch die Maschenzahl n des Modells in der betreffenden Richtung. Hieraus geht auch die Bedeutung einer genügend großen Maschenzahl hervor.

Es kann der Fall auftreten, daß auch der Widerstand zwischen den Punkten V_0 und V_3 nach Bild 6 ebenfalls eine Differenz gegen den Nennwert aufweist. Wenn die Widerstandsänderungen ΔR gleiches Vorzeichen haben, erhalten wir für die Potentialänderung (an Stelle der Gl. 33):

$$\delta V_0 = \mp\frac{\Delta R}{4\,R}(V_1 + V_3 - 2\,V_0)\,. \tag{36}$$

Sie ist im allgemeinen sehr klein, wie die Messungen gut bestätigt haben. Ungünstiger ist der Fall, wenn die beiden Änderungen ΔR verschiedenes Vorzeichen haben. Dann erhalten wir:

$$\delta V_0 = \mp \frac{\Delta R}{4R}(V_1 - V_3) \approx \mp \frac{\Delta R}{2R} \cdot \Delta V, \tag{37}$$

da $V_1 - V_3 \approx 2\,\Delta V$ angenommen wird. Wenn wir noch die Toleranzen in der y-Richtung berücksichtigen, wäre im ungünstigsten Fall die Potentialänderung:

$$\delta V_0 = \mp \frac{\Delta R}{4R}\left(\overline{V_1 - V_3} + \overline{V_2 - V_4}\right), \tag{38}$$

und somit die prozentuale Änderung bei Berücksichtigung der vektoriellen Summe:

$$\frac{\delta V_0}{U_0} = \mp \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\Delta R}{R} \frac{\Delta V}{U_0} \approx \mp \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\Delta R}{R} \frac{1}{n}, \tag{39}$$

wenn die Maschenzahl n in beiden Richtungen gleich ist.

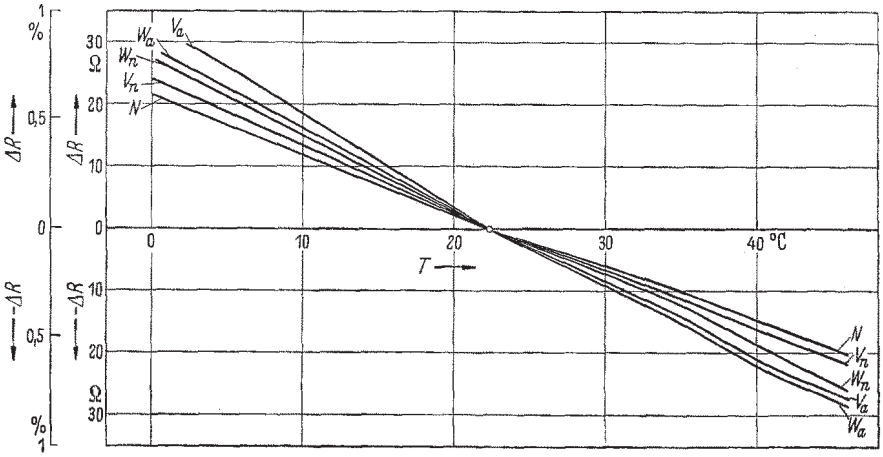

Bild 7. Temperaturabhängigkeit der eingebauten Widerstände. N: nicht gefeilte Widerstände, V_n: viel gefeilte neue Widerstände (kurz nach dem Feilen und Lackieren), W_n: wenig gefeilte, neue Widerstände, V_a: viel gefeilte, alte Widerstände (längere Zeit nach dem Feilen und Lackieren), W_a: wenig gefeilte, alte Widerstände.

G. LIEBMANN [6] gab eine Abschätzung des Fehlers, wenn die Änderungen der Widerstände statistisch verteilt sind. Dann müssen wir $\frac{\Delta R}{R}$ durch $\sigma\left(\frac{\Delta R}{R}\right)$ und δV durch $\sigma(\delta V)$ in den Gleichungen ersetzen, wobei σ die Abweichungsfunktion ist. Messungen ergaben ungefähr eine Normalfrequenzkurve für $\sigma\left(\frac{\Delta R}{R}\right)$. Als gesamte statistische Abweichung erhält man:

$$\sigma_T\left(\frac{\delta V}{U_0}\right) = \sigma\left(\frac{\Delta R}{R}\right)\left[\left(\frac{E_x}{E_a}\right)^2\left(\frac{d}{a}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_b}\right)^2\left(\frac{d}{b}\right)^2\right]^{1/2}, \tag{40}$$

wobei mit E die Feldstärken bezeichnet wurden, mit a die Abmessung des Modells in der x-Richtung, mit b in der y-Richtung und mit d die Maschenweite. Für eine eindimensionales Kondensatorfeld bei $a = 50\,d$ und $\sigma\left(\frac{\Delta R}{R}\right) = 5.10^{-3}$ (Widerstandstoleranzen von $\pm$ 1%) folgt:

$$\sigma_T\left(\frac{\delta V}{U_0}\right) = 10^{-4}.$$

Die statistische relative Abweichung ist also praktisch gering.

Die Widerstände wurden beim Einlöten erwärmt. Auch beim Durchfließen der Ströme werden sie möglicherweise erwärmt. Somit ist es notwendig, ihre Temperaturabhängigkeit zu kontrollieren. Die verwendeten Widerstände hatten ursprünglich die Toleranz $\pm$ 10%. Sie wurden durch Aussuchen und Feilen auf den Wert 3,5 kΩ abgeglichen, mit einer Toleranz von $\pm$ 0,2%, was eine genügende Genauigkeit der Meßmethode zur Folge hat. Die verwendeten Widerstände haben die gute Eigenschaft, daß sie ihren Widerstandswert bei Erwärmung nicht viel ändern, und beim Wiedererkalten erwies sich der Wiederstandswert als vollkommen rever-

sibel. Es wurden Messungen im Temperaturbereich von 0 bis 50° C mit einer Reihe von 6 ausgewählten Widerständen durchgeführt. Die Resultate der Messungen sind aus Bild 7 ersichtlich. Im Bereich von 0 bis 50° C ist die prozentuale Änderung kleiner als $\pm$ 1%, wenn die Temperatur von 22° C als Normaltemperatur angenommen wird.

Es wurden auch die Alterungseigenschaften geprüft. Wiederholte Messungen nach einem Jahr zeigten minimale Veränderungen. Nach den Ergebnissen des vorliegenden Abschnitts 3 haben die genannten Abweichungen fast keinen Einfluß auf die Genauigkeit der Potentialmessungen mit der Anordnung.

Die obige Arbeit wurde teilweise durch ein Stipendium des Battelle Memorial Institute in Genf ermöglicht und gefördert, wofür an dieser Stelle der gebührende Dank ausgesprochen wird.

Zusammenfassung

Bei den Messungen von Feldern mit Raumladung sowie auch ohne Raumladung mit Hilfe von Widerstandsnetzen entstanden in gewissen Fällen sehr große Abweichungen zwischen den genauen, theoretisch berechneten und den an Modellen gemessenen Werten. Hierdurch wurde eine Untersuchung der vorkommenden Fehlerquellen unerläßlich. Es wurden untersucht: Der Einfluß der endlichen Maschenweite, der Zahl der verwendeten Maschen im Modell, Berechnung und Beseitigung der Randeffekte, der Einfluß der Widerstandswahl, der Widerstandstoleranzen und der Widerstandsänderungen. Mit den beschriebenen Ergebnissen erweist sich das Widerstandsnetz mit Stromquellen als wertvolles Hilfsmittel zur praktischen Lösung von partiellen Differentialgleichungen, mit komplizierten Randbedingungen, die man analytisch nicht lösen kann.

Literatur

[1] RICHARDSON, L. F.: The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations with an application to the stresses in a masonry dam. Philos. Trans. Roy. Soc. London A 210, 1911, S. 308. — [2] RICHARDSON, L. F.: Math. Gazette 12, 1925, S. 415. — [3] LIEBMANN, H.: Die angenäherte Ermittlung harmonischer Funktionen und konformer Abbildung. Sitzgsber. bayer. Akad. Wiss., Math.-phys. Kl. 1918, S. 385. — [4] COURANT, R., K. FRIEDRICHS u. H. LEWY: Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik. Math. Annalen, Bd. 100, 1928, S. 32. — [5] GERSCHGORIN, S.: Fehlerabschätzung für das Differenzenverfahren zur Lösung partieller Differentialgleichungen. Z. angew. Math. Mech., Bd. 10, 1930, S. 373. — [6] LIEBMANN, G.: Solution of partial differential equations with a resistance network analogue. B. J. A. Phys., Vol. 1, 1950, S. 92. — [7] FOX, L.: Some improvements in the use of relaxation methods for the solution of ordinary and partial differential equations. Proc. Roy. Soc. London, Vol. 190, Sept. 1947, S. 31. — [8] CULVER, R.: The use of the extrapolation techniques with electrical network analogue solutions . B.J.A. Phys., Vol. 3, Dc. 1952, S. 376. — [9] LIEBMANN, G. und R. BAILEY: An improved experimental iteration method for use with resistance network analogues. B. J. A. Phys., 5, Jan. 1954, S. 32. — [10] COLLATZ, L.: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen. Springer Ver. 1951. — [11] REDSHAW, S. C.: A three dimensional electrical potential analyser. Brit. Journ. Appl. Phys. 2, 1951, S. 291. — [12] LIEBMANN, G.: The solution of waveguide and cavity-resonator problems with the resistance-network analogue. Proc. Inst. El. Engrs., Part IV, 99, 1952, S. 260. — [13] LIEBMANN, G: Resistance-network analogues with unequal meshes or subdivides meshes. Brit. Journ. Appl. Phys. 5, 1954, S. 362. — [14] HECHTEL, R.: Ein Widerstandsnetzwerk zur Lösung der Poissonschen Gleichung. Telef. Röhre 32, 1955, S. 38. — [15] LIEBMANN, G.: Resistance-network analogues. Revue E, SBE, Vol. 1, Nr. 12, 1956, S. 287. — [16] ČREMOŠNIK, G.: Ermittlung von Raumladungsfeldern und Kapazitäten mit Hilfe eines Widerstandsnetzes mit Stromquellen. Diss. E. T. H., Nr. 2667, Zürich 1956 (im Druck).

Dr. G. ČREMOŠNIK und Prof. Dr. Dr.-Ing. E.h. M. J. O. STRUTT,
Eidgen. Techn. Hochschule Zürich, Institut für höhere Elektrotechnik.